

文章编号:1005-3085(2011)03-0393-08

## 非奇异H-矩阵的新判据

江 如

(广东海洋大学理学院, 湛江 524088)

**摘 要:** 非奇异H-矩阵在矩阵分析和数值代数的研究中具有重要作用. 本文利用广义 $\alpha$ -对角占优矩阵、不可约 $\alpha$ -对角占优矩阵和具非零元素链 $\alpha$ -对角占优矩阵的概念和性质, 通过对矩阵行标作划分的方法, 首先给出了非奇异H-矩阵的两个新的判定条件. 然后进一步将所得结果应用于比较矩阵和转置比较矩阵的和, 得到了另一个更为实用的判据. 最后, 用数值例子说明了所给结果的有效性.

**关键词:** 非奇异H-矩阵; 比较矩阵;  $\alpha$ -对角占优矩阵; 不可约矩阵; 非零元素链

**分类号:** AMS(2000) 15A57

**中图分类号:** O151.21

**文献标识码:** A

### 1 引言和预备知识

非奇异H-矩阵是一类重要的矩阵, 它们在矩阵论、数学物理、控制论、电力系统理论等领域中都有广泛应用. 本文利用文献[1,2]的思想, 给出了非奇异H-矩阵的一些新的判定条件, 改进和推广了文献[3]的结果.

用 $C^{n \times n}$ ,  $R^{n \times n}$ 分别表示所有 $n$ 阶复矩阵及实矩阵的集合, 定义 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . 若存在 $N_1, N_2, \dots, N_k \subset N$ , 满足 $N_i \cap N_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , 对任意的 $i, j \in N$ , 且 $\cup_{i=1}^k N_i = N$ , 则称 $N_1, N_2, \dots, N_k$ 为集合 $N$ 的划分, 记为 $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$ . 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 用 $A^*$ 表示矩阵 $A$ 的共轭转置, 记

$$R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad S_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|, \quad i, j \in N.$$

**定义1** 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若对任意的 $i \in N$ , 有 $|a_{ii}| > R_i(A)$ , 则称 $A$ 为严格对角占优矩阵; 若存在正对角矩阵 $X$ , 使得 $AX$ 是严格对角占优的, 则称 $A$ 为非奇异H-矩阵, 记为 $A \in \tilde{D}$ .

**定义2** 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若存在 $\alpha \in [0, 1]$ , 使得对任意的 $i \in N$ , 有 $|a_{ii}| > \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A)$ , 则称 $A$ 为严格 $\alpha$ -对角占优矩阵; 若存在正对角矩阵 $X$ , 使得 $AX$ 是严格 $\alpha$ -对角占优的, 则称 $A$ 为广义 $\alpha$ -对角占优矩阵.

**定义3** 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 存在 $\alpha \in [0, 1]$ , 使对任意的 $i \in N$ , 有 $|a_{ii}| \geq \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A)$ , 且上式中至少有一个严格不等式成立. 若 $A$ 不可约, 则称 $A$ 为不可约 $\alpha$ -对角占优矩阵; 若对上式中每一个等式成立的下标 $i$ , 都存在非零元素链 $a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{k-1} j_k} \neq 0$ , 满足 $|a_{j_k j_k}| > \alpha R_{j_k}(A) + (1 - \alpha)S_{j_k}(A)$ , 则称 $A$ 为具非零元素链 $\alpha$ -对角占优矩阵.

**定义4** 记

$$Z_n = \{A = (a_{ij}) \in R^{n \times n} : a_{ij} \leq 0, i \neq j, \forall i, j \in N\}, \quad A = (a_{ij}) \in Z_n,$$

若  $A^{-1}$  存在且  $A^{-1} \geq 0$ , 则称  $A$  为非奇异 M-矩阵; 若对任意的  $i \in N$ , 有  $a_{ii} > 0$ , 则称  $A$  为 L-矩阵.

记  $M(A) = (m_{ij}) \in R^{n \times n}$  为  $A$  的比较矩阵, 其中

$$m_{ii} = |a_{ii}|, \quad m_{ij} = -|a_{ij}|, \quad i \neq j, \quad \forall i, j \in N.$$

熟知,  $A \in \tilde{D}$  当且仅当  $M(A)$  为非奇异 M-矩阵.

**引理 1**<sup>[4]</sup> 设  $A \in C^{n \times n}$ , 则  $A \in \tilde{D}$  当且仅当  $A$  为广义  $\alpha$ -对角占优矩阵.

**引理 2**<sup>[5]</sup> 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若  $A$  为不可约  $\alpha$ -对角占优矩阵, 或  $A$  为具非零元素链  $\alpha$ -对角占优矩阵, 则  $A$  为非奇异 H-矩阵.

**引理 3**<sup>[6]</sup> 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若  $A$  为 L-矩阵, 且  $P = \frac{1}{2}(A + A^*)$  为非奇异 H-矩阵, 则  $A$  为非奇异 M-矩阵.

**引理 4** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若  $B = M(A) + M^T(A)$  为非奇异 H-矩阵, 则  $A \in \tilde{D}$ .

**证明** 因为  $B \in \tilde{D}$ , 由引理 3 易得  $M(A)$  为非奇异 M-矩阵, 故  $A \in \tilde{D}$ .

设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 由非奇异 H-矩阵的定义知, 若  $a_{ii} = 0$ , 则  $A \notin \tilde{D}$ , 因此, 在本文中我们总假设  $a_{ii} \neq 0$ . 设  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$  为  $N$  的一个划分, 其中

$$N_1 = \{i \in N : 0 < |a_{ii}| = \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A)\},$$

$$N_2 = \{i \in N : 0 < |a_{ii}| < \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A)\},$$

$$N_3 = \{i \in N : |a_{ii}| > \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A)\}.$$

由引理 1 知, 若  $N_1 \cup N_2 = \emptyset$ , 则  $A \in \tilde{D}$ ; 若  $N_3 = \emptyset$ , 则  $A \notin \tilde{D}$ . 故我们总假设:  $N_1 \cup N_2 \neq \emptyset$ ,  $N_3 \neq \emptyset$ . 此外, 规定  $\sum_{t \in \emptyset} \bullet = 0$ .

**定义**

$$x_t = \frac{\alpha R_t(A) + (1 - \alpha)S_t(A)}{|a_{tt}|}, \quad y_t = \frac{R_t(A) + S_t(A)}{2|a_{tt}|}, \quad \forall t \in N.$$

## 2 主要结果

**定理 1** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若存在  $\alpha \in (0, 1]$ , 使对任意的  $i \in N_2$ , 恒有

$$|a_{ii}| > \frac{x_i \alpha}{x_i - 1} \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha)S_i(A), \quad (1)$$

则  $A$  为非奇异 H-矩阵.

**证明** 记

$$P_i = \alpha \left( \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha)S_i(A), \quad \forall i \in N_1,$$

$$Q_i = \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) (1 - \alpha)S_i(A), \quad \forall i \in N_2.$$

由  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的定义, 显然有  $0 < 1 - \frac{1}{x_t} < 1$ ,  $t \in N_2$  且  $0 < x_t < 1$ ,  $t \in N_3$ , 故

$$P_i < \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A) = |a_{ii}|, \quad \forall i \in N_1. \quad (2)$$

设

$$M_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}|} (|a_{ii}| - P_i), & \forall i \in N_1, \\ \frac{1}{\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}|} \left( \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) |a_{ii}| - Q_i \right), & \forall i \in N_2, \end{cases} \quad (3)$$

当  $\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| = 0$  时, 记  $M_i = +\infty$ . 由式 (1)、(2) 知, 对任意的  $i \in N_1 \cup N_2$ , 有  $M_i > 0$ . 因此一定存在充分小的正数  $\varepsilon$ , 使得

$$0 < \varepsilon < \min_{i \in N_1 \cup N_2} M_i \leq +\infty. \quad (4)$$

故可构造正对角矩阵  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 其中

$$d_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1, \\ 1 - \frac{1}{x_i}, & i \in N_2, \\ \varepsilon + x_i, & i \in N_3. \end{cases}$$

设  $B = (b_{ij}) = AD$ , 则对任意的  $i, j \in N$ , 有  $b_{ij} = d_j a_{ij}$ . 下证  $B$  为严格  $\alpha$ -对角占优矩阵.

对任意的  $i \in N_1$ , 有:

(i) 当  $\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| = 0$  时, 即对任意的  $t \in N_3$ , 有  $a_{it} = 0$ . 由式 (3) 得

$$\begin{aligned} \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) S_i(A) \\ &< \alpha R_i(A) + (1 - \alpha) S_i(A) = |a_{ii}| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

(ii) 当  $\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \neq 0$  时, 由式 (3)、(4) 得

$$\begin{aligned} &\alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) \\ &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} (\varepsilon + x_t) |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) S_i(A) \\ &< \alpha \left( \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) S_i(A) + M_i \alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \\ &= |a_{ii}| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

对任意的  $i \in N_2$ , 有:

(i) 当  $\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| = 0$  时, 即对任意的  $t \in N_3$ , 有  $a_{it} = 0$ . 由式 (1) 得

$$\begin{aligned} &\alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) \\ &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) S_i(A) \\ &< \frac{x_i - 1}{x_i} |a_{ii}| = \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) |a_{ii}| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

(ii) 当  $\alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \neq 0$  时, 由式 (3), (4) 得

$$\begin{aligned}
 & \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) \\
 &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} (\varepsilon + x_t) |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) S_i(A) \\
 &< \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) S_i(A) + M_i \alpha \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \\
 &= \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) |a_{ii}| = |b_{ii}|.
 \end{aligned}$$

对任意的  $i \in N_3$ , 因为对任意的  $t \in N_2$ , 当  $x_t > 1$  时,  $0 < 1 - \frac{1}{x_t} < 1$ , 且对任意的  $t \in N_3$ ,  $0 < x_t < 1$ , 所以有

$$R_i(A) - \sum_{t \in N_1} |a_{it}| - \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| - \sum_{t \in N_3, t \neq i} x_t |a_{it}| > 0, \quad \forall i \in N_3.$$

由  $N_3$  的定义, 显然又有

$$|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in N_3, t \neq i} |a_{it}| - (1 - \alpha) S_i(A) > 0, \quad \forall i \in N_3.$$

故有

$$\begin{aligned}
 & |b_{ii}| - (\alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B)) \\
 &= (\varepsilon + x_i) |a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in N_1} |a_{it}| - \alpha \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| \\
 &\quad - \alpha \sum_{t \in N_3, t \neq i} (\varepsilon + x_t) |a_{it}| - (1 - \alpha) (\varepsilon + x_i) S_i(A) \\
 &= \varepsilon \left( |a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in N_3, t \neq i} |a_{it}| - (1 - \alpha) S_i(A) \right) + x_i |a_{ii}| \\
 &\quad - \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3, t \neq i} x_t |a_{it}| \right) - (1 - \alpha) x_i S_i(A) \\
 &> \alpha \left( R_i(A) - \sum_{t \in N_1} |a_{it}| - \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| - \sum_{t \in N_3, t \neq i} x_t |a_{it}| \right) \\
 &\quad + (1 - \alpha) S_i(A) - (1 - \alpha) x_i S_i(A) > (1 - \alpha) (1 - x_i) S_i(A) \geq 0.
 \end{aligned}$$

即

$$|b_{ii}| > \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B), \quad \forall i \in N_3.$$

综上所述

$$|b_{ii}| > \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B), \quad \forall i \in N,$$

即  $B = AD$  为严格  $\alpha$ -对角占优矩阵. 所以  $A$  为广义  $\alpha$ -对角占优矩阵, 由引理 1 得  $A$  为非奇异 H-矩阵.

**注 1** 当  $\alpha = 1$  时, 此即为文献 [1] 的定理 1, 故定理 1 包含了文献 [1] 的定理 1.

**定理 2** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , 记

$$I(A) = \left\{ i \in N_2 : |a_{ii}| = \frac{x_i \alpha}{x_i - 1} \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left( 1 - \frac{1}{x_t} \right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) S_i(A) \right\},$$

若

$$|a_{ii}| \geq \frac{x_i \alpha}{x_i - 1} \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left( 1 - \frac{1}{x_t} \right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) S_i(A), \quad \forall i \in N_2,$$

且  $A$  还满足如下条件之一:

1)  $A$  不可约; 2) 对任意的  $i \in I(A) \neq \emptyset$ , 都存在非零元素链  $a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{k-1} j_k} \neq 0$ , 使得  $j_k \in (N \setminus I(A))$ , 则  $A$  为非奇异 H-矩阵.

**证明** 由  $x_t$  和  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的定义知,  $x_i > 1$ ,  $i \in N_2$ ;  $0 < x_i < 1$ ,  $i \in N_3$ . 故可构造正对角矩阵  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 其中

$$d_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1, \\ 1 - \frac{1}{x_i}, & i \in N_2, \\ x_i, & i \in N_3. \end{cases}$$

设  $B = (b_{ij}) = AD$ , 则对任意的  $i, j \in N$ , 有  $b_{ij} = d_j a_{ij}$ .

对任意的  $i \in I(A) \subseteq N_2$ , 有

$$\begin{aligned} & \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) \\ &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left( 1 - \frac{1}{x_t} \right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) \left( 1 - \frac{1}{x_i} \right) S_i(A) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{x_i} \right) |a_{ii}| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

对任意的  $i \in N_1$ , 有

$$\begin{aligned} & \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) \\ &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left( 1 - \frac{1}{x_t} \right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) S_i(A) \\ &< \alpha R_i(A) + (1 - \alpha) S_i(A) = |a_{ii}| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

对任意的  $i \in N_2 \setminus I(A)$ , 有

$$\begin{aligned} & \alpha R_i(B) + (1 - \alpha) S_i(B) \\ &= \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2, t \neq i} \left( 1 - \frac{1}{x_t} \right) |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}| \right) + (1 - \alpha) \left( 1 - \frac{1}{x_i} \right) S_i(A) \\ &< \left( 1 - \frac{1}{x_i} \right) |a_{ii}| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

对任意的  $i \in N_3$ , 有

$$\begin{aligned} & |b_{ii}| - (\alpha R_i(B) + (1 - \alpha)S_i(B)) \\ &= x_i |a_{ii}| - \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| - \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| - \sum_{t \in N_3, t \neq i} x_t |a_{it}| \right) - (1 - \alpha)x_i S_i(A) \\ &= \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)S_i(A) - \alpha \left( \sum_{t \in N_1} |a_{it}| - \sum_{t \in N_2} \left(1 - \frac{1}{x_t}\right) |a_{it}| - \sum_{t \in N_3, t \neq i} x_t |a_{it}| \right) \\ &\quad - (1 - \alpha)x_i S_i(A) > (1 - \alpha)(1 - x_i)S_i(A) \geq 0. \end{aligned}$$

总结以上结论知, 对任意的  $i \in N$ , 有

$$|b_{ii}| \geq \alpha R_i(B) + (1 - \alpha)S_i(B).$$

当  $A$  不可约时, 则  $B = AD$  也不可约, 故  $B$  是不可约  $\alpha$ -对角占优矩阵, 由引理 2 有  $B \in \tilde{D}$ , 再由引理 1 得  $A \in \tilde{D}$ . 当  $A$  满足条件 (2) 时, 则  $B = AD$  为具非零元素链  $\alpha$ -对角占优矩阵. 由引理 2 知,  $B \in \tilde{D}$ , 即得  $A \in \tilde{D}$ .

**注 2** 当  $\alpha = 1$  时, 此即为文献 [1] 的定理 2 和定理 3, 故定理 2 包含了文献 [1] 的定理 2 和定理 3. 若将定理 1 应用于矩阵  $B = M(A) + M^T(A)$ , 可以得到下面更为实用的定理 3.

设  $N = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$  为  $N$  的一个划分, 其中

$$K_1 = \{i \in N : 0 < 2|a_{ii}| = R_i(A) + S_i(A)\},$$

$$K_2 = \{i \in N : 0 < 2|a_{ii}| < R_i(A) + S_i(A)\},$$

$$K_3 = \{i \in N : 2|a_{ii}| > R_i(A) + S_i(A)\}.$$

若  $K_1 \cup K_2 = \emptyset$ , 则  $B = M(A) + M^T(A)$  为严格对角占优矩阵, 即得  $A$  为非奇异 H-矩阵. 故我们假设:  $K_1 \cup K_2 \neq \emptyset$ .

**定理 3** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ,  $K_3 \neq \emptyset$ , 若存在  $\alpha \in (0, 1]$ , 使对任意的  $i \in K_2$ , 恒有

$$\begin{aligned} 2|a_{ii}| &> \frac{y_i}{y_i - 1} \alpha \left[ \sum_{t \in K_1} (|a_{it}| + |a_{ti}|) + \sum_{t \in K_2, t \neq i} \left(1 - \frac{1}{y_t}\right) (|a_{it}| + |a_{ti}|) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t \in K_3} y_t (|a_{it}| + |a_{ti}|) \right] + (1 - \alpha)(R_i(A) + S_i(A)), \end{aligned}$$

则  $A$  为非奇异 H-矩阵.

**证明** 设  $B = (b_{ij}) = M(A) + M^T(A)$ , 则

$$b_{ii} = 2|a_{ii}|, \quad b_{ij} = -|a_{ij}| - |a_{ji}|, \quad i \neq j, \quad i, j \in N,$$

对任意的  $i \in N$ , 有

$$R_i(B) = R_i(A) + S_i(A) = S_i(B),$$

也即有

$$\alpha R_i(B) + (1 - \alpha)S_i(B) = R_i(A) + S_i(A).$$

所以, 若  $A$  满足定理 3 的条件, 也即  $B$  满足定理 1 的条件, 故  $B \in \tilde{D}$ . 于是, 由引理 4 可得  $A \in \tilde{D}$ .

### 3 数值例子

例 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 10 & 3.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

取  $\alpha = 1$ , 则

$$N_1 = \{1\}, \quad N_2 = \{2, 3\}, \quad N_3 = \{4, 5\},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1.5, \quad x_4 = 0.4, \quad x_5 = 0.5625.$$

此时

$$|a_{22}| = 2 \not> 7.46667 = \frac{x_2}{x_2 - 1} \left( |a_{21}| + \left(1 - \frac{1}{x_3}\right) |a_{23}| + x_4 |a_{24}| + x_5 |a_{25}| \right),$$

故 (1) 式不成立, 也即无法用文献 [1] 的定理 1 去判定.

现取  $\alpha = \frac{3}{11}$ , 则

$$N_1 = \{2\}, \quad N_2 = \{4\}, \quad N_3 = \{1, 3, 5\},$$

$$x_1 = \frac{7}{11}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{15}{22}, \quad x_4 = \frac{14}{11}, \quad x_5 = \frac{83}{176}.$$

此时

$$|a_{44}| = 10 > 2.534607 = \frac{x_4 \alpha}{x_4 - 1} \left( |a_{42}| + x_1 |a_{41}| + x_3 |a_{43}| + x_5 |a_{45}| \right),$$

所以  $A$  满足本文定理 1 的条件, 故可判定  $A$  为非奇异 H-矩阵.

致谢: 作者衷心感谢导师—华南师范大学黎穗教授的悉心指导!

### 参考文献:

- [1] 黄廷祝. 非奇 H 矩阵的简捷判据[J]. 计算数学, 1993, 15(4): 318-328  
Huang T Z. Some simple determinate conditions for nonsingular H-matrix[J]. Mathematic Numerica Sinica, 1993, 15(4): 318-328
- [2] 江如. 广义对角占优矩阵的新判据[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2010, (1): 24-27  
Jiang R. New criteria for generalized diagonally dominant matrices[J]. Journal of South China Normal University (Natural Science Edition), 2010, (1): 24-27
- [3] 干泰彬, 黄廷祝. 非奇异 H 矩阵的实用充分条件[J]. 计算数学, 2004, 26(1): 110-116  
Gan T B, Huang T Z. Practical sufficient conditions for nonsingular H-matrices[J]. Mathematic Numerica Sinica, 2004, 26(1): 110-116
- [4] 李继成, 张文修. H 矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报, 1999, 21(3): 264-268  
Li J C, Zhang W X. Criteria for H-matrices[J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 1999, 21(3): 264-268
- [5] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1997, 19(3): 216-223  
Sun Y X. Sufficient conditions for generalized diagonally dominant matrices[J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 1997, 19(3): 216-223

- [6] 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇的判定 (II)[J]. 工程数学学报, 1988, 5(3): 12-16  
Gao Y M. Criteria of the generalized diagonal dominance and nonsingularity of matrices (II)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1988, 5(3): 12-16

## New Criteria for Nonsingular H-matrices

JIANG Ru

(School of Sciences, Guangdong Ocean University, Zhanjiang 524088)

**Abstract:** Nonsingular H-matrices play an important role in the research of matrix analysis and numerical algebra. Based on the concepts and properties of  $\alpha$ -diagonally dominant matrices, irreducible  $\alpha$ -diagonally dominant matrices and  $\alpha$ -diagonally dominant matrices with a nonzero elements chain, two new criteria for nonsingular H-matrices are obtained firstly in this paper according to the partition of the row indices. Secondly, a more practical criterion is also obtained by applying the above results to the sum of the comparison matrix and its transpose. A numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the presented criteria.

**Keywords:** nonsingular H-matrix; comparison matrix;  $\alpha$ -diagonally dominant matrix; irreducible matrix; nonzero elements chain